ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 5 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Exemples d'utilisation du théorème de Courant-Fischer

Notations et rappels : Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres réelles de A, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et rg(A) son rang.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $<X, Y> \longmapsto {}^tXY$.

1ère Partie

A- Étude d'une matrice

Soit U un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1, \dots, u_n$. On pose $M = U\,{}^tU$.

1. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, exprimer le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice M à l'aide des u_k. Que vaut la trace de M ?

2. Exprimer les colonnes de M à l'aide de $u_1, \dots, u_n$ et U.

3. Montrer alors que le rang de M est égal à 1.

4. Justifier que 0 est valeur propre de M et montrer que le sous-espace propre associé est égale à $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

5. Calculer le produit MU et en déduire que ${}^tUU$ est une autre valeur propre de M. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

6. Montrer que la matrice M est orthogonalement semblable à la matrice diagonale D où
$$D = diag({}^tUU, 0, \dots, 0).$$

B- Théorème de Courant–Fischer

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), <,>)$ formée de vecteurs propres de f.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f rangées dans l'ordre croissant et on désigne par $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \quad \text{et} \quad f(e_i) = \lambda_i e_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note V_k le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$: $V_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, et $\mathcal{F}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui sont de dimension k.

Si v est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose $\quad R_A(v) = \dfrac{<Av, v>}{<v, v>} = \dfrac{<f(v), v>}{<v, v>}$.

2. Calculer $R_A(e_k)$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Soit $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Exprimer les quantités $<f(v), v>$ et $<v, v>$ en fonction des x_k et λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.

4. Montrer alors que $\quad \lambda_1 = \min\limits_{v \neq 0} R_A(v) \quad$ et $\quad \lambda_n = \max\limits_{v \neq 0} R_A(v)$.

5. Soient $k \in \{1, \ldots, n\}$ et w un vecteur non nul de V_k. Montrer que $R_A(w) \leqslant \lambda_k$ et conclure que
$$\lambda_k = \max_{v \in V_k \setminus \{0\}} R_A(v).$$

6. Soient $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $F_1 \in \mathcal{F}_k$.
   (a) Montrer que la dimension du sous-espace vectoriel $F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$ est $\geqslant 1$.
   (b) Soit w un vecteur non nul de $F_1 \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$. Montrer que $R_A(w) \geqslant \lambda_k$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $\quad \lambda_k = \min\limits_{F \in \mathcal{F}_k} \big(\max\limits_{v \in F \setminus \{0\}} R_A(v) \big)$. (*Théorème de Courant-Fischer*)

7. (a) Montrer que l'application $\psi_A :\ v \longmapsto <Av, v>$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en déduire la continuité de l'application R_A sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ est connexe par arcs et conclure que l'image de l'application $R_A$est un intervalle.
   (c) Montrer alors que $\{R_A(v),\ v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \} = [\lambda_1, \lambda_n]$

2ème Partie

On rappelle qu'une matrice B, symétrique réelle d'ordre n, est dite définie positive si pour tout vecteur non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait
$${}^tXBX > 0.$$

1. Soit B une matrice symétrique réelle d'ordre n. Montrer que B est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique réelle d'ordre 2.
   (a) On suppose que A est définie positive ; montrer alors que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.
   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de composantes x et y ; exprimer ${}^tXAX$ en fonction de $a,\ b,\ c,\ x$ et y et montrer que si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors A est définie positive.

Le but de la suite de cette partie est d'étendre le résultat de cette question à n quelconque.

3. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A et on note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f. Soient H un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et p la projection orthogonale sur H ; on note g l'endomorphisme induit par $p \circ f$ sur H.

   (a) Montrer que g est un endomorphisme autoadjoint de H.
   Soient alors $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1}$ les valeurs propres de g.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\lambda_k \leqslant \mu_k$.

   (c) Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

      i. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension $k+1$, le sous-espace vectoriel $F \cap H$ est de dimension $\geqslant k$.

      ii. Soit F comme à la question précédente et soit donc G un sous-espace vectoriel de $F \cap H$, de dimension k. Comparer $<g(v), v>$ et $<f(v), v>$, pour $v \in G$, et en déduire que $\displaystyle\max_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{<g(v), v>}{<v, v>} \leqslant \max_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{<f(v), v>}{<v, v>}$.

      iii. Conclure que $\mu_k \leqslant \lambda_{k+1}$.

4. On reprend les hypothèses de la question précédente et on écrit $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ {}^t b & \mu \end{pmatrix}$, avec $\mu \in \mathbb{R},\ b \in \mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$ et $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

   (a) Que représente la matrice A_{n-1} ? Justifier qu'elle est symétrique.

   (b) On note $\mu'_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu'_{n-1}$ les valeurs propres de la matrice A_{n-1}. Montrer que
   $$\lambda_1 \leqslant \mu'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \mu'_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

   (c) Conclure que si la matrice A est définie positive, il en est de même de la matrice A_{n-1}.

5. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_k = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$.

   (a) Montrer que si A est définie positive alors les déterminants des matrices A_k sont tous strictement positifs.

   (b) En utilisant le résultat de la question 4. précédente, montrer par récurrence sur n, que la réciproque de (a) est vraie.

6. **Un exemple d'utilisation** : On considère la matrice $M(t) = \left(t^{|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n},\ t \in [0, 1]$.

   (a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1[$, la matrice $M(t)$ est symétrique définie positive.

   (b) En déduire que la matrice $M_1 = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique définie positive.
   (*On remarquera que* $M_1 = \int_0^1 M(t)\, dt$).

3$^{\text{ème}}$ Partie

A- Une deuxième application

1. Soient A et A' deux matrices symétriques réelles d'ordre n. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ (resp. $\lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n$) les valeurs propres de A (resp. A') ; on note aussi $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres de la matrice $E = A' - A$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\lambda_k + \mu_1 \leqslant \lambda'_k \leqslant \lambda_k + \mu_n.$$

(b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad |\lambda'_k - \lambda_k| \leqslant \|A - A'\|$, où $\|.\|$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, subordonnée à la norme euclidienne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. En déduire que l'ensemble S_n^+ des matrices symétriques réelles d'ordre n et définies positives est un ouvert de l'espace vectoriel S_n des matrices symétriques réelles d'ordre n.

B- Une dernière application

Soient A une matrice symétrique réelle d'ordre n et U un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n$ celles de la matrice $A_\varepsilon = A + \varepsilon M$ avec $M = U\,{}^t\!U$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

D'après la section **A-** de la première partie, il existe une matrice orthogonale R telle que

$${}^t\!RMR = \begin{pmatrix} {}^t\!UU & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On décompose alors la matrice ${}^t\!RAR$ par blocs comme pour la matrice ${}^t\!RMR$ et on obtient

$${}^t\!RAR = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t\!a \\ a & A_{n-1} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R},\ a \in \mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$ et $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. La matrice A_{n-1} est évidement symétrique réelle, il existe donc une matrice orthogonale S, d'ordre $n-1$, et des réels $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$${}^t\!SA_{n-1}S = diag(\alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

On pose enfin $Q = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice Q est orthogonale.

2. Montrer, en effectuant des produits par blocs, que

$${}^t\!QAQ = \begin{pmatrix} \alpha & {}^t\!a\,S \\ {}^t\!S\,a & D_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\!QA_\varepsilon Q = \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon{}^t\!U\,U & {}^t\!a\,S \\ {}^t\!S\,a & D_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $D_{n-1} = diag(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

3. On suppose que $\varepsilon \geqslant 0$. Montrer en utilisant par exemple la question (A-1.) de cette partie que, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\lambda_k \leqslant \lambda'_k \leqslant \lambda_k + \varepsilon{}^t\!U\,U.$$

4. On suppose ici que ε est quelconque et on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice Q.

(a) Vérifier que $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on désigne par $y_1, \ldots, y_n$ les composantes de X dans la base $(C_1, \ldots, C_n)$. Montrer alors que

$${}^t\!XAX = \alpha y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i y_i^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \beta_j y_1 y_j,$$

où $\beta_2, \ldots, \beta_n$ sont les composantes du vecteur ${}^t\!S\,a$ de $\mathcal{M}_{(n-1),1}(\mathbb{R})$.

(c) Écrire une relation analogue à la précédente et concernant la matrice A_ε, puis en déduire, lorsque X est non nul, que

$$R_{A_\varepsilon}(X) = R_A(X) + \varepsilon\,{}^t\!U\,U\,\frac{y_1^2}{<X,X>}.$$

(d) En choisissant convenablement le X, montrer que $\lambda'_2 \geqslant \lambda_1$. On utilisera les formules $\lambda'_2 = \min\limits_{F\in\mathcal{F}_2}\big(\max\limits_{v\in F\setminus\{0\}} R_{A_\varepsilon}(v)\big)$ et $\lambda_1 = \min\limits_{v\neq 0} R_A(v)$.

FIN DE L'ÉPREUVE